



TITLE:

# Microlocal Energy Method and Applications(Microlocal Analysis and its Applications)

AUTHOR(S):

片岡, 清臣

---

CITATION:

片岡, 清臣. Microlocal Energy Method and Applications(Microlocal Analysis and its Applications). 数理解析研究所講究録 1991, 750: 82-84

ISSUE DATE:

1991-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82033>

RIGHT:

# Microlocal Energy Method and Applications

東大理 片岡清臣

$R^{m+n} \ni (t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n)$  とし, 点  $x_0^* = (0, 0; i dx_n)$  でミクロ局所的に考える.

$$P = \sum_{j,k=1}^m a_{jk}(t, x, D_t, D_x) Z_j Z_k^* + b(t, x, D_t, D_x) D_{x_n}$$

$a_{jk}, b$  : 0-階のミクロ微分作用素

$$D_t = \partial_t, D_x = \partial_x$$

$$Z_j = D_{t_j} + i t_j D_{x_n}, Z_j^* = D_{t_j} - i t_j D_{x_n} \quad (\text{Treves 型作用素})$$

良く知られているように, 上の作用素が点  $x_0^*$  で解析的準楕円型となるための一つの十分条件として

$$\textcircled{1} \quad \sigma_0(a_{jk})(x_0^*) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_m \end{pmatrix}, \quad \text{Re} \alpha_j > 0, \quad \forall j.$$

$$\textcircled{2} \quad \sigma_0(b)(x_0^*) \neq \frac{1}{i} (2N_1 \alpha_1 + \dots + 2N_m \alpha_m), \quad \forall N_1, \dots, N_m = 0, 1, 2, \dots$$

以下この結果の我々の立場 (i.e. 解析的カテゴリーでの超局所エネルギー法) からの証明を与える.

Simplest case

$$P_0 = \sum_{j=1}^m \alpha_j (D_{t_j}^2 + t_j^2 D_{x_n}^2) + \gamma D_{x_n}$$

$$\alpha_j, \gamma \in \mathbb{C}, \quad \text{Re} \alpha_j > 0$$

を考える

$$P_0 = \sum_{j=1}^m \alpha_j Z_j Z_j^* + (\gamma + i \alpha_1 + \dots + i \alpha_m) D_{x_n}$$

であり, 上の条件は

$$\gamma + i \alpha_1 + \dots + i \alpha_m \neq \frac{1}{i} (2N_1 \alpha_1 + \dots + 2N_m \alpha_m), \quad \forall N_1, \dots, N_m = 0, 1, \dots$$

さて,  $f \in C_{R^{m+n}}^*|_{x_0^*}$  に対して  $P_0 f(t, x) = 0$  at  $x_0^*$  とせよ. これより  $\text{SS}(f) \subset \{t=0\}$  であり, 特に,  $f$  は  $t$  に解析的に依存する.  $p_0 = (0, 0; i(dx - du)) \in iT^*R^{1+1}$  とする. ここに  $u$  は変数  $x$  のコピー. 以下簡単のため  $n=1, x_n \mapsto x$  とする.  $f^* = \overline{f(t, u)}, P_0^* = \overline{P_0(t, u, D_u)}$  と置けば,  $p_0$  において

$$0 = \int_{|t| \leq r} -(P_0 f \cdot f^* + f \cdot P_0^* f^*) dt$$

$\parallel$   
 $g(x, u)$  : Hermitian microfunction

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^m \int_{|t| \leq r} \left\{ 2 \operatorname{Re} \alpha_j f_{t_j} f_{t_j}^* - t_j^2 (\alpha_j D_x^2 + \overline{\alpha_j} D_x^2) f f^* \right\} dt \\
&\quad \begin{array}{c} \sqrt{0} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{positive} \\ \text{quasi-positive} \end{array} \\
&+ \int_{|t| \leq r} (-\gamma D_x - \overline{\gamma} D_x) f f^* dt \\
&\quad \operatorname{Re}(-\gamma i) > 0 \text{ なら quasi-positive}
\end{aligned}$$

よって  $\operatorname{Im} \gamma = \operatorname{Re}(-\gamma i) > 0$  ならこれから  $f = 0$  がわかる。しかしこれでは条件として強すぎるので、concatenation method で改良を試みる。

$$\begin{aligned}
Z_j^* P_0 &= (P_0 + 2i\alpha_j D_x) Z_j^* \\
P_0 f &= 0 \Rightarrow (P_0 + 2i\alpha_j D_x) Z_j^* f = 0
\end{aligned}$$

故に  $P_0 + 2i\alpha_j D_x$  が hypoelliptic なら  $Z_j^* f = 0$  となる ( $\forall j = 1, \dots, m$ )。

$$\begin{aligned}
\text{よって } P_0 &= \sum_{j=1}^m \alpha_j Z_j Z_j^* + (\gamma + \alpha_1 + \dots + \alpha_m) D_x \text{ より} \\
&(\gamma + \alpha_1 + \dots + \alpha_m) D_x f = 0
\end{aligned}$$

が得られる。故に  $\gamma + \alpha_1 + \dots + \alpha_m \neq 0$  なら割り算できて  $f \neq 0$  が結論できる。

$\operatorname{Im}(\gamma + 2\alpha_j) > 0$ ,  $\forall j = 1, \dots, m$  なら,  $P_0 + 2i\alpha_j D_x$  は点  $x_0^*$  で解析的準楕円型。よって  $\operatorname{Im} \gamma > -2 \min_{1 \leq j \leq m} \operatorname{Re} \alpha_j$  まで定理が示された。以下同様。

以上の方法は subelliptic で無いときも使える。例えば

$$P' = \sum_{j=1}^m \alpha_j (D_t^2 + t_j^2 D_{x_n}^2) - i(\alpha_1 + \dots + \alpha_m) D_x + \delta, \quad 0 \neq \delta \in \mathbb{C}$$

のときも解析的準楕円性が云える。

一般の場合の取扱い方

『  $P_0$  : frozen operator of  $P$  at  $x_0$  が elliptic

$$\Rightarrow R = P_0 - P \text{ として } \|f\|_2 \leq C \|P_0 f\|_0 = C \|Rf\|_0 \leq C |R| \|f\|_2$$

ここに  $|R|$  は適当な symbol norm. よってこれが  $\ll 1$  なら

$f \equiv 0$  でなければならない』

という論法を用いる。我々は次のような新しい Sobolev ノルムを用いる：

定義 Analytic Sobolev Norm

$$\Lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|L| \geq 0} C_1^{2j} C_2^{2|L|} \left( \frac{(2j+|L|)!}{(j+|L|)!} \right)^2 (D_{x_n} D_{u_n})^{-j-|L|} (D_t^j D_s^L)$$

$\in E_{X \times X}$

$$L = (\ell_1, \dots, \ell_m)$$

$$p_0 = (0, 0; i d x_n - i d u_n) \in iT^*(R_t^m \times R_x^n \times R_s^m \times R_u^n)$$

$$(s, u) : \text{a copy of } (t, x) \in R_t^m \times R_x^n$$

$$c_1, c_2 \gg 1, \quad \text{with } 0 < \frac{c_2}{c_1} \ll 1$$

$C^\omega$ -パラメータ  $t$  に依存するミクロ函数  $f(t, x)$  に対する  $k$  次の解析的ソボレフノルムを

$$\|f\|_k^2(x, u) := \int_{|t| \leq r} (D_t D_s)^k \Lambda(f(t, x) \overline{f(s, u)}) \Big|_{t=s} dt$$

で定める。ノルムと云っても  $x, u$  のミクロ函数である。

補題  $A(t, x, D_t D_x)$  : 点  $(0, 0; id_{x_n})$  における 0-階ミクロ微分作用素

$f_1(t, x), f_2(t, x)$  : 点  $(0, 0; id_{x_n})$  におけるミクロ函数で  $t$  に  $C^\omega$  に依存するもの

$$f_j^* = \overline{f_j(s, u)} \quad (j = 1, 2),$$

とする。このとき次のような正定値 Hermitian 構造の意味での順序関係が成立：

$$\begin{aligned} & \Lambda(Af_1 \cdot f_2^* + f_1 \cdot (Af_2)^*) \\ & \ll \exists C(|A|_r \Lambda(f_1 f_1^*) + |A|_r \cdot \Lambda(f_2 f_2^*)) \\ & \quad + \frac{1}{|A|_r} \sum_{\ell} \widetilde{A}_{\ell}(t, x, D_x) \widetilde{A}_{\ell}(s, u, D_u) (\Lambda(f_1 f_1^* + f_2 f_2^*)) \end{aligned}$$

ここに

$$|A|_r = \sup_{V_r} |A(t, x, \tau, \xi)|,$$

$$V_r = \{(t, x, \tau, \xi) \in T^*(C^{m+n});$$

$$|\tau| \leq r \operatorname{Im} \xi_n, |\xi_1| + \cdots + |\xi_{n-1}| + |\operatorname{Re} \xi_n| \leq r \operatorname{Im} \xi_n\}$$

$\widetilde{A}_{\ell} : V_{r/2}$  上の適当な symbol で  $|\widetilde{A}_{\ell}|_{r/2} \leq C \cdot 2^{-\ell} |A|_r$  を満たすもの

補題 ( $m = 1, n = 1$  のとき)  $\{\alpha(D_t^2 + t^2 D_x^2) + \gamma D_x\} f = g$  から

$$\begin{aligned} & \left( 2 \operatorname{Re} \alpha - \frac{2c_2^2}{c_1} - 4 \left( \frac{2c_2^2}{c_1} \right)^2 \right) \int D_t D_s \Lambda(ff^*) \Big|_{t=s} dt \\ & + \left( -\operatorname{Re} \alpha \cdot (D_x^2 + D_u^2) - \frac{2c_2^2}{c_1} D_x D_u \right) \int t^2 \Lambda(ff^*) \Big|_{t=s} dt \\ & + \left( -\gamma D_x - \delta D_u \right) \int \Lambda(ff^*) \Big|_{t=s} dt \\ & \ll - \int \Lambda(gf^* - fg^*) \Big|_{t=s} dt \end{aligned}$$

が導かれる。

定理の証明

$$g = (P_0 - P)f \text{ と置く.}$$

$$P_0 - P = D_t^2 A + t D_t D_x B + t^2 D_x^2 C + t D_x E$$

と書ける。ここに  $A, B, C, D, E$  は 0-階のミクロ微分作用素である。よって上の量の微小倍で抑えられる。(正確に云うと quasi positive order relation でやらねばならないが、その説明は略す。)  $\operatorname{Im} \gamma > 0$  ではこれのできる。general case は再び concatenation を使う。